ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
24 ΜΑΪΟΥ 2008
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α.1 Θεωρία (Σελ. 235 σχολ. βιβλίου).

Α.2 Θεωρία (Σελ. 191 σχολ. βιβλίου).

Β

- **α.** Σωστό
- **β.** Σωστό
- **γ.** Λάθος
- **δ.** Λάθος
- **ε.** Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

α. Η ισότητα $\left|(i+2\sqrt{2})z\right|=6$, γράφεται ισοδύναμα:

$$\left|(i+2\sqrt{2}\right|\cdot|z|=6 \Leftrightarrow \sqrt{8+1}\cdot|z|=6 \Leftrightarrow 3|z|=6 \Leftrightarrow |z|=2.$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων Ο, ακτίνα $p=2$ και εξίσωση (c): $x^2+y^2=2^2$.

β. Έστω $w=x+yi$ οι μιγαδικοί αριθμοί που ικανοποιούν την σχέση:

$$|w-(1-i)|=|w-(3-3i)|,$$

από την οποία έχουμε:

$$|w-(1-i)|=|w-(3-3i)| \Leftrightarrow |x+yi-1+i|=|x+yi-3+3i| \Leftrightarrow$$

$$|(x-1)+(y+1)i|^2=|(x-3)+(y+3)i|^2 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+1)^2=(x-3)^2+(y+3)^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2-2x+1+y^2+2y+1=x^2-6x+9+y^2+6y+9 \Leftrightarrow$$

$$4x-4y-16=0 \Leftrightarrow x-y-4=0.$$

Επομένως ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων M(w) είναι τα σημεία της ευθείας (ε) με εξίσωση: $x - y - 4 = 0$.

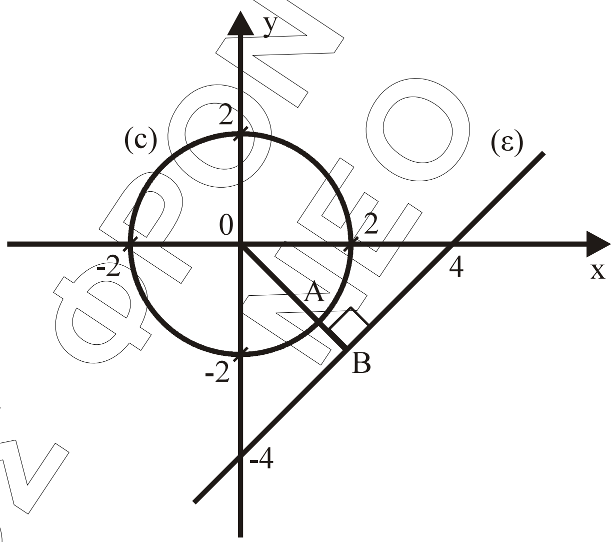
γ. Η ελάχιστη τιμή του $|w|$ είναι η απόσταση του σημείου O από την ευθεία

(ε): $x - y - 4 = 0$, δηλαδή:

$$d(O,\varepsilon) = \frac{|-4|}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\,.$$

δ. Σύμφωνα με το παρακάτω σχήμα, όπου αναπαριστώνται γεωμετρικά οι γεωμετρικοί τόποι των εικόνων (c), (ε) αντίστοιχα των μιγαδικών αριθμών z και w βρίσκουμε ότι, η ελάχιστη τιμή του $|z - w|$ είναι το μήκος του τμήματος AB:

$$AB = OB - OA = 2\sqrt{2} - p = 2(\sqrt{2} - 1)\,.$$



ΘΕΜΑ 3^{o}

α) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x \cdot \ln x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{\underset{\text{De l'Hospital}}{=}} =$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0\,.$$

Επίσης $f(0) = 0$. Συνεπώς f συνεχής στο 0.

β) Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως γινόμενο συνεχών και συνεχής στο 0 λόγω του α.

Άρα η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$.

Για $x > 0$: $f'(x) = (x\ln x)' = (x)'\ln x + x \cdot (\ln x)' = \ln x + x\frac{1}{x} = \ln x + 1$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

Έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f΄		-	0	+	
f		↘		↗	

- Στο $\left[0, \frac{1}{e}\right)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα:

$$f\left(\left[0, \frac{1}{e}\right)\right) = \left(\lim_{x\to \frac{1}{e}} f(x),\ f(0)\right] = \left(-\frac{1}{e}, 0\right].$$

- Στο $\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)$ η f είναι γνησίως αύξουσα άρα:

$$f\left(\left[\frac{1}{e}, +\infty\right)\right) = \left[f\left(\frac{1}{e}\right),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = \left[-\frac{1}{e}, +\infty\right).$$

Επομένως: $f([0, +\infty)) = \left(-\frac{1}{e},\ 0\right] \cup \left[-\frac{1}{e},\ +\infty\right) = \left[-\frac{1}{e},\ +\infty\right).$

γ.

Επειδή $e^{\frac{a}{x}} > 0$, για κάθε $x \neq 0$, για την εξίσωση $x = e^{\frac{a}{x}}$ προκύπτει ο περιορισμός $x \in (0,+\infty)$. Με τον περιορισμό αυτό η εξίσωση $x = e^{\frac{a}{x}}$ γράφεται ισοδύναμα:

$\ln x = \ln e^{\frac{a}{x}} \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{a}{x} \Leftrightarrow x\ln x = a \Leftrightarrow f(x) = a$, $x > 0$ (1).

Επειδή το σύνολο των τιμών της f βρέθηκε $\left[-\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ προκύπτουν οι περιπτώσεις:

i) Αν $a \in (-\infty,-\dfrac{1}{e})$ η (1) είναι αδύνατη.

ii) Αν $a = -\dfrac{1}{e}$, η τιμή $-\dfrac{1}{e}$ είναι η ελάχιστη τιμή της f την οποία παίρνει μόνον για $x = \dfrac{1}{e}$.

Έτσι η (1) έχει την ρίζα $x = \dfrac{1}{e}$.

iii) Αν $a \in (-\dfrac{1}{e},0)$, επειδή $\left(-\dfrac{1}{e},0\right) = f\left(\left(0,\dfrac{1}{e}\right)\right)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ προκύπτει ότι, η (1) έχει ακριβώς μία ρίζα στο $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ που είναι θετική.

Επίσης επειδή $\left[-\dfrac{1}{e},+\infty\right) = f\left(\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)\right)$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ προκύπτει ότι η (1) έχει ακριβώς άλλη μία ρίζα στο $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ που είναι επίσης θετική.

iv) Αν $a = 0$ η (1) γίνεται $x\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (απορρίπτεται) ή $\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. (Μία ρίζα θετική).

v) Αν $a \in (0,+\infty)$ επειδή $(0,+\infty) \subseteq \left[-\dfrac{1}{e},+\infty\right) = f\left(\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)\right)$ και η f γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$, προκύπτει ότι η (1) έχει ακριβώς μία θετική ρίζα στο $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$.

δ. Είναι $f''(x) = \dfrac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$.

Άρα f' γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[x, x + 1]$, για κάθε $x > 0$.

Άρα υπάρχει $\xi \in (x,\ x + 1)$: $\dfrac{f(x+1) - f(x)}{x+1-x} = f'(\xi) \Leftrightarrow f(x+1) - f(x) = f'(\xi) \quad (2)$.

Όμως $\xi < x+1 \xRightarrow{f' \text{ γν.αύξουσα}} f'(\xi) < f'(x+1) \xRightarrow{(2)} f(x+1) - f(x) < f'(x+1)$.

ΘΕΜΑ 4^{ο}

α) Το $\int_0^2 f(t)dt$ β είναι πραγματικός αριθμός.

Έτσι μπορούμε να θέσουμε $\int_0^2 f(t)dt = k \in R$.

Τότε $f(x) = (10x^3 + 3x)k - 45$ και άρα :

$$\int_0^2 f(t)dt = \int_0^2 \left[\left(10t^3 + 3t\right)k - 45\right]dt = \left[k\left(10\frac{t^4}{4} + 3\frac{t^2}{2}\right) - 45t\right]_0^2 = 40k + 6k - 90 = 46k - 90.$$

Η δοσμένη σχέση τώρα γίνεται:

$\left(10x^3 + 3x\right)k - 45 = \left(10x^3 + 3k\right)\left(46k - 90\right) - 45$, για κάθε $x \in R \Leftrightarrow$

$\left(10x^3 + 3x\right)\left(k - 46k + 90\right) = 0$, για κάθε $x \in R \Leftrightarrow$

$\left(10x^3 + 3x\right)\left(90 - 45k\right) = 0$, για κάθε $x \in R$.

Από την τελευταία έπεται ότι $k = 2$.

Οπότε τελικά: $f(x) = (10x^3 + 3x)2 - 45 = 20x^3 + 6x - 45$.

β) Έστω $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[-\frac{g'(x-h) - g'(x)}{h}\right] =$$

$$\xRightarrow[\substack{h \to 0 \\ u \to 0}]{-h=u} \lim_{u\to 0}\left[-\frac{g'(x+u) - g'(x)}{-u}\right] = \lim_{u\to 0}\frac{g'(x+u) - g'(x)}{u} = g''(x),$$

αφού ή g από υπόθεση είναι δύο φορές παραγωγίσιμη.

γ) (i) Έχουμε:

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2} \underset{\text{D.L. H.}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{h\to 0}\frac{\left[g(x+h)-2g(x)+g(x-h)\right]'}{(h^2)'} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x-h)}{2h} = \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{g'(x+h)-g'(x-h)}{h} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\left[\frac{g'(x+h)-g'(x)-g'(x-h)+g'(x)}{h}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\lim_{h\to 0}\left[\frac{g'(x+h)-g'(x)}{h}+\frac{g'(x)-g'(x-h)}{h}\right] = \frac{1}{2}\cdot\left[g''(x)+g''(x)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\cdot g''(x) = g''(x).$$

Οπότε $g''(x) = f(x)+45 = (20x^3+6x-45)+45 = 20x^3+6x$.

Η $g''(x) = 20x^3+6x$ γράφεται:

$$\left(g'(x)\right)' = (20\frac{x^4}{4}+6\frac{x^2}{2})' \Rightarrow g'(x) = 5x^4+3x^2+c_1.$$

Για $x=0$ έχουμε: $g'(0) = c_1 = 1$. Οπότε $g'(x) = 5x^4+3x^2+1$.

Η $g'(x) = 5x^4+3x^2+1$ τώρα γράφεται:

$$g'(x) = \left(5\frac{x^5}{5}+3\frac{x^3}{3}+x\right)' \Rightarrow g(x) = x^5+x^3+x+c_2$$

Για $x=0$ έχουμε: $g(0) = c_2 = 1$

Άρα $g(x) = x^5+x^3+x+1$.

(ii) Η $g(x) = x^5+x^3+1$ ως πολυωνυμική, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x) = 5x^4+3x^2+1$.

Όμως $g'(x) = 5x^4+3x^2+1 > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και '1–1'.