ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β' ΚΥΚΛΟΥ ΤΕΕ

12 ΙΟΥΝΙΟΥ 2008

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α. Η μέση τιμή είναι $\bar{x} = \frac{8+14+20+12+16}{5} = \frac{70}{5} = 14$.

β. Διατάσσουμε κατ' αύξουσα σειρά τους βαθμούς του μαθητή: 8, 12, 14, 16, 20. Έτσι προκύπτει ότι η διάμεσος είναι 14.

γ. Η τυπική απόκλιση είναι

$$s = \sqrt{\frac{(8-14)^2 + (14-14)^2 + (20-14)^2 + (12-14)^2 + (16-14)^2}{5}} =$$

$$= \sqrt{\frac{36+36+4+4}{5}} = \sqrt{\frac{80}{5}} = 4.$$

δ. Εύρος = 20 – 8 = 12.

ε. $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} > \frac{1}{10}$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ 2ο

α. Είναι

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{x}-1}{\lambda(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\lambda(x-1)(\sqrt{x}+1)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{(x-1)}{\lambda(x-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{2\lambda}.$$

β. Είναι

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{3x-1} = \frac{1}{2}.$$

ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΝΕΟ

γ. Η f είναι συνεχής στη θέση $x_0 = 1$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1).$$

Δηλαδή $\frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Επομένως $\frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{2}$.

Άρα $\lambda = 1$.

ΘΕΜΑ 3ο

α. Είναι:

$$f'(x) = (e^{\lambda x})' = \lambda \cdot e^{\lambda x} \quad \text{και}$$
$$f''(x) = (\lambda \cdot e^{\lambda x})' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}.$$

β. Από τη δοσμένη σχέση:

$$f''(x) - f'(x) - 2f(x) = 0$$

με αντικατάσταση των:

$$f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x},\ \ f'(x) = \lambda e^{\lambda x} \ \text{ και }\ f(x) = e^{\lambda x}$$

έχουμε:

$\lambda^2 e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} - 2e^{\lambda x} = 0 \Leftrightarrow e^{\lambda x}(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 2 \text{ ή } \lambda = -1)$.

γ.

- Για την τιμή $\lambda = 2$ η $f(x)$ γράφεται: $f(x) = e^{2x}$.
  Είναι: $f'(x) = 2e^{2x}$ και επειδή $e^{2x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

- Για την τιμή $\lambda = -1$ η $f(x)$ γράφεται: $f(x) = e^{-x}$.
  Είναι: $f'(x) = -e^{-x}$ και επειδή $e^{-x} > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, προκύπτει ότι $-e^{-x} < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
  Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 4ο

α. Είναι

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 2008\right)' =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot(3x^2) - 2\cdot(2x) + 3 = x^2 - 4x + 3, \quad x \in R.$$

ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΝΕΟ

β. Είναι $f\,'(x) = (x-1)(x-3)$ οπότε προκύπτει ο επόμενος πίνακας μεταβολών:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f\,'$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗	τ.μ.	↘	τ.ε.	↗	

Δηλαδή:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[3, +\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, 3]$.
- Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 1 και τοπικό ελάχιστο στο 3.

γ. Από τον πίνακα μεταβολών προκύπτει ότι

$f(x) \geq f(3) = 2008$ για κάθε $x \in [1, +\infty)$.

Πιο αναλυτικά:

i) Για $1 \leq x \leq 3$ αφού f γνησίως φθίνουσα έπεται: $f(1) \geq f(x) \geq f(3)$.

ii) Για $x \geq 3$ αφού f γνησίως αύξουσα έπεται: $f(x) \geq f(3)$.

Άρα για κάθε $x \in [1, +\infty)$ είναι $f(x) \geq f(3) = 2008$.

ΟΜΙΛΟΣ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΩΝ ΝΕΟ