

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ & ΕΠΑ.Λ. Β'

27 ΜΑΪΟΥ 2013

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

- A1. Θεωρία σελ. 334, σχολικού βιβλίου.
A2. Θεωρία σελ. 247, σχολικού βιβλίου.
A3. Θεωρία σελ. 222, σχολικού βιβλίου.
A4. α) $\rightarrow \Lambda$, β) $\rightarrow \Sigma$, γ) $\rightarrow \Sigma$, δ) $\rightarrow \Lambda$, ε) $\rightarrow \Sigma$.

ΘΕΜΑ Β

B1.

- Η δοσμένη σχέση γράφεται:
 $|z-2|^2 + |z-2| = 2 \Leftrightarrow |z-2|^2 + |z-2| - 2 = 0$.
Αν $|z-2| = y$ είναι $y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ ή $y = -2$.
Όμως $y = |z-2| \geq 0$ άρα $|z-2| = 1$.
Οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z είναι κύκλος με κέντρο $K(2, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$.
- Εξάλλου είναι $|z| = |z-2+2| \leq |z-2| + |2| = 1+2 = 3$ άρα $|z| \leq 3$.
Σημείωση: Η τελευταία ανίσωση μπορεί να προκύψει και γεωμετρικά.

B2. Είναι $z_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{-\Delta}i}{2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{4\gamma - \beta^2}i}{2}$, οπότε

$$|\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2 \Leftrightarrow \left| \pm \frac{2\sqrt{4\gamma - \beta^2}}{2} \right| = 2 \Leftrightarrow 4\gamma - \beta^2 = 4 \quad (1).$$

Επειδή $z_{1,2}$ ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος B1 είναι:

$$\left(\frac{\beta}{2} - 2 \right)^2 + \left(\pm \frac{\sqrt{4\gamma - \beta^2}}{2} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{\beta}{2} + 2 \right)^2 + \frac{4\gamma - \beta^2}{4} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\beta^2}{4} + 2\beta + 4 + \gamma - \frac{\beta^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 2\beta + \gamma = -3 \quad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει $\beta = -4$ και $\gamma = 5$.

(2ος τρόπος)

Οι μιγαδικοί z_1, z_2 είναι συζυγείς, άρα μπορούμε να θέσουμε

$$z_1 = x + yi, z_2 = x - yi, x, y \in \mathbb{R}.$$

Η σχέση $|\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2$ γράφεται τώρα $|2y| = 2 \Leftrightarrow |y| = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$.

Έτσι $z_{1,2} = x \pm i$. Επειδή $z_{1,2}$ ανήκουν στον τόπο του ερωτήματος 1 είναι

$$|z_{1,2} - 2| = 1 \Leftrightarrow |x \pm i - 2| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (\pm 1)^2} = 1 \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Έτσι όμως $z_{1,2} = 2 \pm i$. Από τις σχέσεις του Vieta προκύπτουν:

$$z_1 + z_2 = -\beta \Leftrightarrow 4 = -\beta \Leftrightarrow \beta = -4.$$

$$z_1 \cdot z_2 = \gamma \Leftrightarrow \gamma = 5.$$

B3. Έστω $|v| \geq 4$. Έχουμε $v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow v^3 = -\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0$.

$$\text{Άρα } |v|^3 = |-\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0| = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0|$$

$$\text{Λόγω της τριγωνικής ανισότητας είναι } |v|^3 = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq |\alpha_2 v^2| + |\alpha_1 v| + |\alpha_0| = \\ = |\alpha_2| \cdot |v|^2 + |\alpha_1| \cdot |v| + |\alpha_0|.$$

Από B_1 είναι $|\alpha_0| \leq 3, |\alpha_1| \leq 3, |\alpha_2| \leq 3$, άρα

$$|\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3 = 3(|v|^2 + |v| + 1)$$

$$\text{Η τελευταία γράφεται } |v|^3 \leq 3 \frac{|v|^3 - 1}{|v| - 1} \text{ (είναι } |v| - 1 > 0 \text{ αφού } |v| \geq 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |v|^3 (|v| - 1) \leq 3(|v|^3 - 1) \Leftrightarrow |v|^4 \leq 4|v|^3 > 3.$$

Όμως $4 \cdot |v|^3 > 3 < 4 \cdot |v|^3$ άρα $|v|^4 < 4 \cdot |v|^3 \Leftrightarrow |v| < 4$ που είναι άτοπο.

Άρα $|v| < 4$.

(2ος τρόπος)

$$\text{Είναι } v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow v^3 = -\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0.$$

$$\text{Άρα } |v|^3 = |-\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0| = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0|.$$

$$\text{Λόγω της τριγωνικής ανισότητας είναι } |v|^3 = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq |\alpha_2 v^2| + |\alpha_1 v| + |\alpha_0| = \\ = |\alpha_2| \cdot |v|^2 + |\alpha_1| \cdot |v| + |\alpha_0|.$$

Από το B_1 είναι $|\alpha_0| \leq 3, |\alpha_1| \leq 3, |\alpha_2| \leq 3$, άρα

$$|\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3 = 3(|v|^2 + |v| + 1). \text{ Δηλαδή } |v|^3 \leq 3(|v|^2 + |v| + 1) \quad (1).$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

α) $|v| = 1$, τότε $|v| < 4$ και ισχύει το ζητούμενο.

β) $|v| \neq 1$, τότε η (1) γράφεται: $|v|^3 \leq \frac{3(|v|^3 - 1)}{|v| - 1}$ (2).

β₁) Αν $|v| < 1$, τότε $|v| < 4$ και ισχύει το ζητούμενο.

β₂) Αν $|v| > 1$, τότε η (2) γράφεται $|v|^3 (|v| - 1) \leq 3(|v|^3 - 1) \Leftrightarrow |v|^4 \leq 4|v|^3 - 3$.

Όμως $4|v|^3 - 3 < 4|v|^3$, άρα $|v|^4 < 4|v|^3$ και επειδή $|v| > 1$, προκύπτει $|v| < 4$.

(3ος τρόπος)

Από τη δοσμένη σχέση, όπως δείχτηκε και στον 2ο τρόπο προκύπτει:

$$|v|^3 \leq 3(|v|^2 + |v| + 1) \Leftrightarrow |v|^3 - 3|v|^2 - 3|v| - 3 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |v|^3 - 4|v|^2 + |v|^2 - 4|v| + |v| - 4 + 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |v|^2(|v| - 4) + |v|(|v| - 4) + (|v| - 4) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (|v| - 4)(|v|^2 + |v| + 1) + 1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (|v| - 4)(|v|^2 + |v| + 1) \leq -1 < 0.$$

Όμως $|v|^2 + |v| + 1 > 0$, άρα $|v| - 4 \leq 0 \Leftrightarrow |v| < 4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x \in \mathbb{R}$ η δοσμένη σχέση γράφεται:

$$(f(x) + x)(f(x) + x)' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \Leftrightarrow \left[\frac{(f(x) + x)^2}{2}\right]' = \left(\frac{x^2}{2}\right)' \Leftrightarrow \frac{(f(x) + x)^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c.$$

Για $x = 0$: $\frac{1}{2} = c$

Έτσι $\frac{(f(x) + x)^2}{2} = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow (f(x) + x)^2 = x^2 + 1.$

Θέτουμε $g(x) = f(x) + x$, $x \in \mathbb{R}$. Είναι $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $g(x)$ συνεχής στο \mathbb{R} άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Επειδή $g(0) = f(0) > 0$ θα είναι $g(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, δηλαδή $f(x) + x > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άρα $f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Γ2. Είναι $f(g(x)) = \sqrt{g^2(x) + 1} - g(x) = 1.$

Άρα $\sqrt{g^2(x) + 1} - g(x) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{g^2(x) + 1} = g(x) + 1$ (1).

$$\text{Πρέπει } g(x)+1 > 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{3x^2}{2} > 0 \Leftrightarrow x^2 \left(x + \frac{3}{2} \right) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\frac{3}{2}, 0 \right) \cup (0, +\infty).$$

Τότε από την (1) προκύπτει:

$$g^2(x)+1 = g^2(x)+1+2g(x) \Leftrightarrow g(x)=0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 2 = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

Είναι $\varphi'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$.

Άρα έχουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολής:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$\varphi'(x)$	+	0	-	0	+
$\varphi(x)$					

Προκύπτει τοπικό μέγιστο $\varphi(-1) = 1$ και τοπικό ελάχιστο $\varphi(0) = -2$. Επίσης προκύπτει ότι το σύνολο τιμών της φ για $x \in [0, +\infty)$ είναι το $[-2, +\infty)$, ενώ για $x < 0$ είναι $\varphi(x) < 0$.

Έτσι προκύπτει ότι υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα για την φ στο $(0, +\infty)$ και επειδή η φ είναι γνησίως αύξουσα σε αυτό, προκύπτει ότι η ρίζα είναι μοναδική.

(2ος τρόπος)

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+1}}$$

Επίσης είναι $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x > \sqrt{x^2} - x = |x| - x \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα

$f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έτσι όμως $f'(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} και άρα $1 - 1$.

Η εξίσωση τώρα $f(g(x)) = 1$ γράφεται $f(g(x)) = f(0) \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 = 0.$$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $g'(x) = 3x^2 + 3x = 3x(x+1)$ $x \in \mathbb{R}$.

Ο πίνακας μεταβολών της g είναι:

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$					

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$, $g(-1) = -\frac{1}{2}$, g συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$, άρα $g((-\infty, -1]) = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$. Άρα η g δεν έχει ρίζα $(-\infty, -1]$.
- $g(-1) = -\frac{1}{2}$, $g(0) = -1$ και g συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 0]$, άρα $g([-1, 0]) = \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$. Άρα η g δεν έχει ρίζα $[-1, 0]$.
- $g(0) = -1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty$, g συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, άρα $g([0, +\infty)) = [-1, +\infty)$.

Παρατηρούμε ότι $0 \in g([0, +\infty))$, άρα υπάρχει $x_0 \in (0, +\infty)$ ώστε $g(x_0) = 0$, που είναι και μοναδική αφού g είναι γνησίως αύξουσα.

Γ3. Θέτουμε $K(x) = \int_{x-\pi/4}^0 f(t)dt - f\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ εφ'αυ, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Η K είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, ενώ επειδή $f(t) = \sqrt{t^2+1} - t > 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$

θα είναι $\int_{-\pi/4}^0 f(t)dt > 0$, δηλαδή $K(0) > 0$.

Επίσης είναι $K\left(\frac{\pi}{4}\right) = -f(0) \cdot \varepsilon\phi\frac{\pi}{4} = -1 < 0$.

Έτσι όμως από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα

$x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε $K(x_0) = 0$ ή $\int_{x_0-\pi/4}^0 f(t)dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right)$ εφ'αυ.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1) - f(1-h) + f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[5 \cdot \frac{f(1+5h) - f(1)}{5h} - \frac{f(1-h) - f(1)}{h} \right] =$$

$$= 5f'(1) - f'(1) = 4f'(1).$$

διότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1)}{5h} \cdot 5 \stackrel{5h=u}{=} 5 \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ u \rightarrow 0}} \frac{f(1+u) - f(1)}{u} = 5f'(1).$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{-h} \stackrel{-h=t}{=} -\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0}} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} = -f'(1).$$

Άρα αφού

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0 \Leftrightarrow 4f'(1) = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0.$$

Για $0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$.

Για $x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$.

Άρα η f είναι \downarrow στο $(0, 1]$ και \uparrow στο $[1, +\infty)$ με $f'(1) = 0$ άρα παρουσιάζει ελάχιστο στο $x = 1$.

Δ2. Η συνάρτηση $\frac{f(t)-1}{t-1}$ συνεχής στο $(1, +\infty)$ άρα η g παραγωγίσιμη με

$$g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}, \quad x \in (1, +\infty).$$

Λόγω του Δ_1 , αφού στο $x_0 = 1$ η f παρουσιάζει ελάχιστο, είναι $f(x) \geq f(1) = 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 1$, άρα $f(x) > 1$ για $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Έτσι $f(x) - 1 > 0$ για $x \in (1, +\infty)$ και $x - 1 > 0$, άρα $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

Άρα g γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

Θεωρούμε τώρα την συνάρτηση $\varphi(x) = \int_x^{x+1} g(u) du$, $x \in (1, +\infty)$.

Είναι $\varphi'(x) = g(x+1) - g(x)$.

Όμως $x < x + 1$ και επειδή g γνησίως αύξουσα θα είναι $g(x) < g(x + 1)$,

άρα $\varphi'(x) > 0$, άρα φ γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$.

Είναι $8x^2 + 5 > 1$ και $2x^2 + 5 > 1$, οπότε η δοσμένη ανίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} \varphi(8x^2 + 5) > \varphi(2x^2 + 5) &\Leftrightarrow 8x^2 + 5 > 2x^2 + 5 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^4 < 4x^2 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 0) \cup (0, 2). \end{aligned}$$

Δ3. Είναι $g''(x) = \frac{(f(x)-1)'(x-1) - (f(x)-1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{f'(x)(x-1) - (f(x)-1)'}{(x-1)^2}$.

Για την f στο $[1, x]$ ισχύει το Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi \in (1, x) : \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(\xi) \Rightarrow \frac{f(x) - 1}{x - 1} = f'(\xi) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) - 1 = (x - 1)f'(\xi).$$

$$\text{Άρα } g''(x) = \frac{f'(x)(x-1) - (x-1)f'(\xi)}{(x-1)^2} = \frac{f'(x) - f'(\xi)}{x-1}.$$

Είναι $\xi < x \Rightarrow f'(\xi) < f'(x) \Rightarrow f'(x) - f'(\xi) > 0$.

Επίσης για $x > 1 \Rightarrow x - 1 > 0$.

Έτσι $g''(x) > 0$ για κάθε $x > 1$ άρα g κυρτή στο $(1, +\infty)$.

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται

$$(a-1)g(x) = (f(a)-1)(x-a) \Leftrightarrow g(x) = \frac{f(a)-1}{a-1}(x-a) \Leftrightarrow g(x) = g'(a)(x-a).$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης για την g στο $x = a$ είναι

$$y - g(a) = g'(a)(x - a) \Leftrightarrow y = g'(a)(x - a).$$

Αφού g κυρτή η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη με εξαίρεση το σημείο επαφής.

Δηλαδή $g(x) \geq y \Rightarrow g(x) \geq g'(a)(x-a)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = a$.
 Άρα η εξίσωση $g(x) = g'(a)(x-a)$ έχει μοναδική λύση $x = a$.

(2ος τρόπος)

Η δοσμένη εξίσωση γράφεται: $(a-1) \int_a^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt - (f(a)-1)(x-a) = 0, \quad x > 1.$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = (a-1) \int_a^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt - (f(a)-1)(x-a), \quad x > 1.$

Η h είναι παραγωγίσιμη με

$$h'(x) = (a-1) \frac{f(x)-1}{x-1} - (f(a)-1) = (a-1) \left[\frac{f(x)-1}{x-1} - \frac{f(a)-1}{a-1} \right] = (a-1)(g'(x) - g'(a)).$$

Η g είναι κυρτή άρα η g' γίνεται αύξουσα και επομένως

- με $x < a \Rightarrow g'(x) < g'(a) \Rightarrow g'(x) - g'(a) < 0 \Rightarrow h'(x) < 0.$
- με $x > a \Rightarrow g'(x) > g'(a) \Rightarrow g'(x) - g'(a) > 0 \Rightarrow h'(x) > 0.$
- $h'(a) = 0.$

Άρα προκύπτει ότι η h έχει ελάχιστη τιμή στη θέση $x_0 = a$, την $h(a) = 0$ που συνακόλουθα είναι και μοναδική.

