ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ 194
Α2. Σχολικό βιβλίο σελ 188
Α3. Σχολικό βιβλίο σελ 150
Α4. α) Λ   β) Σ   γ) Λ   δ) Σ   ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$|z-4|=2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2=2^2|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4)(\bar{z}-4)=4(z-1)(\bar{z}-1) \Leftrightarrow$$

$$z\bar{z}-4z-4\bar{z}+16=4z\bar{z}-4z-4\bar{z}+4 \Leftrightarrow 12=3z\bar{z} \Leftrightarrow z\bar{z}=4 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow |z|=2$$

Αρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του μιγαδικού z είναι ο κύκλος με κέντρο Ο (0,0) και ακτίνα ρ=2.

Β2.

Α)

$$w\in R \Leftrightarrow w=\bar{w} \Leftrightarrow \frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}=\left(\overline{\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}}\right) \Leftrightarrow \frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}=\frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2}+\frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1} \Leftrightarrow$$

$$2z_1z_1\bar{z}_2\bar{z}_1+2z_2z_2\bar{z}_2\bar{z}_1=2\bar{z}_1z_2z_1\bar{z}_1+2\bar{z}_2z_1z_2\bar{z}_2 \Leftrightarrow 2|z_1|^2z_1\bar{z}_2+2|z_1|^2\bar{z}_1z_2=2|z_1|^2\bar{z}_1z_2+2|z_1|^2z_1\bar{z}_2 \Leftrightarrow$$ που

$$8z_1\bar{z}_2+8\bar{z}_1z_2=8\bar{z}_1z_2+8z_1\bar{z}_2$$

ισχύει άρα $w\in R$

Β)

$$|w|=\left|\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\right|=\left|\frac{2z_1^{\,2}+2z_2^{\,2}}{z_1z_2}\right|=\frac{|2z_1^{\,2}+2z_2^{\,2}|}{|z_1z_2|}=\frac{2|z_1^{\,2}+z_2^{\,2}|}{4}=$$

$$=\frac{1}{2}|z_1^{\,2}+z_2^{\,2}|\le\frac{1}{2}\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)=\frac{1}{2}8=4$$

Άρα $|w|\le 4$ και επειδή αποδείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα ότι $w\in R$ από ιδιότητες απόλυτης τιμής ισχύει

$$|w|\le 4 \Rightarrow -4\le w\le 4$$

Β3.

$$w=-4 \Rightarrow \frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}=-4 \Rightarrow 2z_1^2+2z_2^2=-4z_1z_2 \Leftrightarrow$$

$$z_1^2+z_2^2=-2z_1z_2 \Rightarrow z_1^2+z_2^2+2z_1z_2=0 \Rightarrow (z_1+z_2)^2=0 \Rightarrow$$

$$z_1+z_2=0 \Rightarrow z_1=-z_2 \quad (1)$$

$$(AB)=|z_1-z_2|\overset{(1)}{=}|z_1+z_1|=2|z_1|=4$$

$$(B\Gamma)=|z_2-z_3|=|-z_1-2iz_1|=|z_1||1+2i|=2\sqrt{5}$$

$(\text{ΑΓ}) = |z_1 - z_3| = |z_1 + 2iz_1| = |z_1||1+2i| = 2\sqrt{5}$

Παρατηρούμε ότι (ΒΓ)=(ΑΓ) άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

$f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$

Γ1. $f'(x) = \dfrac{e^x(x^2+1) - e^x 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ άρα $f \uparrow$ στο $\mathbb{R}$

$A = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x^2+1} = 0$ αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2+1} = 0$

$B = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(e^x)'}{(x^2+1)'} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(e^x)'}{(2x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2} = +\infty$

Άρα $f(A) = (A, B) = (0, +\infty)$

Γ2. Παρατηρώ $f(2) = \dfrac{e^2}{5}$ οπότε

$f\left(e^{3-x}(x^2+1)\right) = \dfrac{e^2}{5} \Leftrightarrow f\left(e^{3-x}(x^2+1)\right) = f(2)$, εφόσον η f είναι 1-1 έχω:

$\dfrac{e^3}{e^x}(x^2+1) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{e^3}{2} = \dfrac{e^x}{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{e^3}{2}$

Αφού $\dfrac{e^3}{2} > 0$ άρα $\dfrac{e^3}{2} \in f(A)$ οπότε η εξίσωση έχει μία ρίζα η οποία είναι μοναδική αφού f 1-1.

Γ3. $\displaystyle\int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2xf(4x), (1)$

Έστω F μία αρχική της f οπότε η F είναι συνεχής στο $[2x, 4x]$,παραγωγίσιμη στο $(2x, 4x)$ άρα από το Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (2x, 4x)$ τέτοιο ώστε

$F'(\xi) = \dfrac{F(4x) - F(2x)}{4x - 2x} \Leftrightarrow f(\xi) = \dfrac{F(4x) - F(2x)}{4x - 2x}$

Η (1) γίνεται $F(4x) - F(2x) < 2xf(4x)$, εφόσον το x είναι θετικό μπορώ να διαιρέσω με 2x οπότε η (1) γίνεται:

$\dfrac{F(4x) - F(2x)}{2x} < f(4x) \Leftrightarrow f(\xi) < f(4x)$, εφόσον $f \uparrow$ έχω:

$\xi < 4x$ που ισχύει αφού $\xi \in (2x, 4x)$.

Γ4. Εξετάζουμε την g ως προς την συνέχεια στο 0:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\int_{2x}^{4x} f(t)dt\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{(4f(4x) - 2f(2x))}{1} = 4f(0) - 2f(0) = 2f(0) = 2 = g(0)$$

$$g'(x)=\frac{\left(4f(4x)-2f(2x)\right)x-\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{x^2}=\frac{2xf(4x)-2xf(2x)+2xf(4x)-\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{x^2}=$$

$$\frac{2x\left(f(4x)-f(2x)\right)+\left(2xf(4x)-\int_{2x}^{4x}f(t)dt\right)}{x^2}>0$$ αφού $2xf(4x)-\int_{2x}^{4x}f(t)dt>0$. Από το Γ3 $2x>0\forall x>0$

$2x<4x\Leftrightarrow f(2x)<f(4x)\Leftrightarrow f(4x)-f(2x)>0$

Η g είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ με $g'(x)>0\forall x\in(0,+\infty)$ άρα είναι $\uparrow$ στο $[0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1

Έχω $f'(x)e^{f(x)}+f'(x)e^{-f(x)}=2\Leftrightarrow\left(e^{f(x)}-e^{-f(x)}\right)'=(2x)'$ Άρα από συνέπειες Θ.Μ.Τ. έχω

$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x+c\overset{x=0}{\Leftrightarrow}1-1=c\Rightarrow c=0$ Οπότε $e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x$ για κάθε $x\in R$.

$$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x\Rightarrow e^{f(x)}-\frac{1}{e^{f(x)}}=2x\Leftrightarrow e^{2f(x)}-2xe^{f(x)}-1=0\Leftrightarrow e^{2f(x)}-2xe^{f(x)}+x^2=1+x^2\Leftrightarrow$$

$$\left(e^{f(x)}-x\right)^2=x^2+1$$

Έχω $x^2+1\neq 0\Rightarrow\left(e^{f(x)}-x\right)^2\neq 0\Rightarrow e^{f(x)}-x\neq 0$ για κάθε $x\in R$.

Επίσης η συνάρτηση $e^{f(x)}-x$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών για κάθε $x\in R$. Οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x\in R$ και επειδή $e^{f(0)}-0=1>0$ έχω $e^{f(x)}-x>0$ για κάθε $x\in R$.

Άρα $\left(e^{f(x)}-x\right)=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow e^{f(x)}=x+\sqrt{x^2+1}\Rightarrow f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $x\in R$

Δ2 α

Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με :

$$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο R με :

$$f''(x)=\frac{-1}{x^2+1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{-1}{x^2+1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=0\Leftrightarrow x=0$$

$$f''(x)>0\Leftrightarrow\frac{-1}{x^2+1}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}>0\Leftrightarrow x<0$$

Οπότε η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$, κοίλη στο $[0,+\infty)$ και έχει σημείο καμπής στο $x_0=0$ το A(0,0)

Δ2 β

Έχω $f(0)=0$ και $f'(0)=1$

Οπότε η ευθεία $y=x$ είναι η εφαπτομένη της f στο $x_0=0$.

Αφού η f είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$ άρα $f(\mathrm{x})\le \mathrm{x} \Rightarrow f(\mathrm{x})-\mathrm{x}\le 0$ οπότε $\left|f(\mathrm{x})-\mathrm{x}\right|=-\left(f(\mathrm{x})-\mathrm{x}\right)$ για $x\in[0,+\infty)$

Το ζητούμενο εμβαδό είναι $\mathrm{E}=\int_0^1\left|f(x)-x\right|dx=-\int_0^1\left(f(x)-x\right)dx=\int_1^0(x)'\left(f(x)-x\right)dx=$

$$\left[x\left(f(x)-x\right)\right]_1^0-\int_1^0 x\left(f'(x)-1\right)dx=-(\ln(1+\sqrt{2})+1-\int_1^0 x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)dx=$$

$$=-(\ln(1+\sqrt{2})+1-\int_1^0\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-x\right)dx=-(\ln(1+\sqrt{2})+1-\left[\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{2}\right]_1^0=$$

$$=-(\ln(1+\sqrt{22})+1-(1-\sqrt{2}+\frac{1}{2})=-(\ln(1+\sqrt{2})+1-1+\sqrt{2}-\frac{1}{2}=-(\ln(1+\sqrt{2})+\sqrt{2}-\frac{1}{2}$$

Δ3

Έχω για $x>0\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(0)\Leftrightarrow f(x)>0$ οπότε $\left|f(x)\right|=f(x)$

$$\lim_{x\to o^+}\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ln\left|f(t)\right|=\lim_{x\to o^+}\left(\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{x}\right)\mathrm{x}\ln\mathrm{f(x)}$$

Έστω $h(x)=e^{\int_0^x f^2(t)dt}$ με $h(0)=e^{\int_0^0 f^2(t)dt}=1$ και $h'(x)=e^{\int_0^x f^2(t)dt}f^2(\mathrm{x})$. Άρα

$$\lim_{x\to o^+}\left(\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{x}\right)=\lim_{x\to o^+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=h'(0)=0$$

$$\lim_{x\to o^+}\mathrm{x}\ln\mathrm{f(x)}=\lim_{x\to o^+}\frac{\ln\mathrm{f(x)}}{\frac{1}{x}}\overset{dlh}{=}\lim_{x\to o^+}\frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to o^+}\frac{-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}=$$

$$=\lim_{x\to o^+}\frac{-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}=\lim_{x\to o^+}\frac{-\frac{2x\sqrt{x^2+1}-x^2\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}}{\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}=0$$

Άρα $\lim_{x\to o^+}\left(\dfrac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{x}\right)x\ln f(x)=0$

Δ4.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=(x-2)(1-3\int_0^{x-2} f(t^2)dt)+(x-3)(8-3\int_0^x f^2(t)dt),\ x\in[2,3]$

- g συνεχής στο $[2,3]$ ως πράξη συνεχών
- $g(2)=3\int_0^1 f(t^2)dt-8$
  $g(3)=1-3\int_0^2 f^2(t)dt$

Γνωρίζουμε ότι $f(x)\le x, x\ge 0$ (από Δ3) και $f(x)<x, x>0$ άρα

$f^2(t)\le t^2, t\in[0,2]$ δηλ

$f^2(t)-t^2\le 0 \Rightarrow \int_0^2\left(f^2(t)-t^2\right)dt<0$ (διοτι η $f^2(t)-t^2$ ειναι συνεχης και οχι παντου μηδεν) $\Rightarrow$

$\int_0^2 f^2(t)dt<\int_0^2 t^2dt \Rightarrow \int_0^2 f^2(t)dt<\frac{8}{3}\Rightarrow 3\int_0^2 f^2(t)dt<8\Rightarrow$

$3\int_0^2 f^2(t)dt-8<0\Rightarrow g(2)<0$

Ομοίως $f(t^2)\le t^2, t\in[0,1]$

$f(t^2)-t^2\le 0\Rightarrow \int_0^1\left(f(t^2)-t^2\right)dt<0$ (διοτι η $f(t^2)-t^2$ ειναι συνεχης και οχι παντου μηδεν) $\Rightarrow$

$\int_0^1 f(t^2)dt<\int_0^1 t^2dt\Rightarrow \int_0^1 f(t^2)dt<\frac{1}{3}\Rightarrow 3\int_0^1 f(t^2)dt<1\Rightarrow$

$3\int_0^1 f(t^2)dt-1<0\Rightarrow g(3)>0$

Αρα $g(2)g(3)<0$ οπότε από Θεώρημα Bolzano θα υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $g(x)=0$ στο διάστημα $(2,3)$ δηλ θα έχουμε ρίζα της

$$\frac{1-3\int_0^{x-2} f(t^2)dt}{x-3}+\frac{8-3\int_0^x f^2(t)dt}{x-2}=0$$

Επιμέλεια: Βερέμης Δημήτρης, Πανούσης Γιώργος, Τσαλιγόπουλος Μίλτος