ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής

ΘΕΜΑ Α

Α1 : Σχολικό βιβλίο σελ : 151

Α2 : Σχολικό βιβλίο σελ : 87

Α3 : Σχολικό βιβλίο σελ : 14

Α4 :

i) Σ
ii) Λ
iii) Σ
iv) Σ
v) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Είναι:

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1\right)'$$

$$= x^2 - 5x + 6$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x = 2 \text{ ή } x = 3$$

Άρα

x $-\infty$ 2 3 $+\infty$

f΄(x)	+	-	+
f(x)	↗	↘	↗

τ.μ τ.ε

Άρα η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 = 2$ με τιμή $f(2) = \frac{11}{3}$ και τοπικό ελάχιστο στο $x_2 = 3$ με τιμή $f(3) = \frac{7}{2}$

B2.

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $A(0, f(0))$ ή $A(0, -1)$ είναι ευθεία της μορφής

$y = \lambda x + \beta$ ή $y = f'(0)x + \beta$ ή $y = 6x + \beta$

Όμως το $A(0, -1)$ ανήκει στην ευθεία άρα την επαληθεύει

$$-1 = 6 \cdot 0 + \beta \Leftrightarrow \beta = -1$$

Επομένως η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτόμενης ευθείας είναι $y = 6x - 1$

B3.

Είναι

$$\lim_{x \to -1} \frac{f'(x) - 12}{x + 1} =$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 5x + 6 - 12}{x + 1} \lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x + 1} = \lim_{x \to -1} \frac{(x + 1)(x - 6)}{x + 1} = -7$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Ο δειγματικός χώρος προσδιορίζεται από το παρακάτω δενδροδιάγραμμα :

1^{o} παιδί 2^{o} παιδί 3^{o} παιδί

$$\begin{cases} A & \begin{cases} A & \begin{cases} A \\ K \end{cases} \\ K & \begin{cases} A \\ K \end{cases} \end{cases} \\ K & \begin{cases} A & \begin{cases} A \\ K \end{cases} \\ K & \begin{cases} A \\ K \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

Άρα Ω=$\{(A,A,A),(A,A,K),(A,K,A),(A,K,K),(K,A,A),(K,A,K),(K,K,A),(K,K,K)\}$

Γ2.

Α=$\{(K,A,A),(K,A,K),(K,K,A),(K,K,K)\}$

Β=$\{(A,K,K),(K,K,A),(K,K,K),(K,A,K)\}$

Γ=$\{(A,A,A),(A,A,K),(K,K,A),(K,K,K)\}$

Γ3.

Είναι $\Delta = A \cap B = \{(K,K,A),(K,K,K),(K,A,K)\}$

με $P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{3}{8}$

$E = A \cup B = \{(K,A,A),(K,A,K),(K,K,A),(K,K,K),(A,K,K)\}$

με $P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{5}{8}$

$Z = \Gamma - E = \{(A,A,A),(A,A,K)\}$

με $P(Z) = \frac{N(Z)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Γ4.

Το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α,Β είναι $H = (A \cup B)'$

με $P(H) = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

Το ενδεχόμενο να πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα Α , Β είναι

$$\Theta = (A - B) \cup (B - A)$$

Επειδή τα $(A - B), (B - A)$ είναι ασυμβίβαστα από απλό προσθετικό νόμο έχουμε:

$$P(\Theta) = P[(A - B) \cup (B - A)]$$
$$= P(A - B) + P(B - A)$$
$$= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{4}{8} - \frac{3}{8} + \frac{4}{8} - \frac{3}{8}$$
$$= \frac{1}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Εφόσον το πλάτος των είναι ίσο με c , τότε οι πρώτες δύο κλάσεις θα είναι της μορφής :

[8,8+c)

[8+c,8+2c).

Η κεντρική τιμή της δεύτερης κλάσης είναι : $\frac{(8+c)+(8+2c)}{2} = 14$

$$16 + 3c = 28$$

$$3c = 12 \quad ή \quad c=4.$$

Δ2.

Το πλήθος των παρατηρήσεων θα είναι : $\nu = \nu 1_{+}\nu_2 + \nu_3 + \nu_4$ ή $\nu = 45 + \nu_4$.

Ο πίνακας γίνεται :

χρόνος	Κ. Τιμή	Συχνότητα
[8,12)	10	20
[12,16)	14	15
[16,20)	18	10
[20,24)	22	ν_4

Ο τύπος της μέσης τιμής γίνεται :

$\bar{x} = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + x_3\nu_3 + x_4\nu_4}{\nu}$ ή $14 = \frac{10\cdot 20 + 14\cdot 15 + 18\cdot 10 + 22\cdot \nu_4}{45 + \nu_4}$ ή

$630 + 14 \cdot \nu_4 = 200 + 210 + 180 + 22 \cdot \nu_4$ ή

$8 \cdot \nu_4 = 40$

$\nu_4 = 5$. Άρα το σύνολο των παρατηρήσεων θα είναι $\nu = 45 + 5 = 50$.

Δ3.

Η τιμή 9 λεπτά ανήκει στην πρώτη κλάση. Εφόσον οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες την χωρίζουμε ως εξής : 8 9 10 11 12. $\nu_1 = 20$.

Το πλήθος των παρατηρήσεων από 9 έως 12 , θα είναι

$$n = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \nu_1 = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot 20 = 15.$$

Άρα οι υπολογιστές που χρειάστηκαν τουλάχιστον 9 λεπτά , θα είναι

$$n + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 = 15 + 15 + 10 + 5 = 45.$$

Δ4 .

χρόνος	Κ. Τιμή	Συχνότητα	$x_i v_i$	$(x_i - \bar{X})^2$	$(x_i - \bar{X})^2 v_i$
[8,12)	10	20	200	16	320
[12,16)	14	15	210	0	0
[16,20)	18	10	180	16	160
[20,24)	22	5	110	64	320
Σύνολο		**50**	**700**		**800**

Η διασπορά των παρατηρήσεων δίνεται από την σχέση:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{4}(X_i - \bar{X})^2 v_i}{v} = \frac{800}{50} = 16$$

Οπότε η τυπική απόκλιση είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{16} = 4$.

Για να εξεταστεί εάν το δείγμα είναι ομοιογενές χρειάζεται να υπολογίσουμε τον συντελεστή μεταβλητότητας

$$CV = \frac{s}{|\bar{X}|} = \frac{4}{14} > 0.1 \text{άρα ανομοιογενές.}$$

Δ5 . Δεδομένου ότι με την αντικατάσταση των επεξεργαστών οι χρόνοι που χρειάστηκαν οι υπολογιστές μειώθηκαν στο 80 % όλες οι παραπάνω παρατηρήσεις πολλαπλασιάζονται με το 0,8 οπότε σύμφωνα με την εφαρμογή 3 σελίδα 99 του σχολικού βιβλίου και η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση θα πολλαπλασιαστούν αντιστοίχως με το 0,8. Δηλαδή :

$$\bar{Y} = 0.8\bar{X} \Rightarrow \bar{Y} = 11.2$$

$S_y = 0.8 s_x = 3.2$

$$CV_y = \frac{s_y}{|\bar{Y}|} = \frac{3.2}{11.2} > 0.1 \text{ άρα ανομοιογενές.}$$

Επιμέλεια απαντήσεων: Ζαφείρης Βασίλης, Κατούδης Γιώργος, Κουντούπης Ηλίας, Τσίμος Βασίλης