ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 262 (i)

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 141

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 246-247

Α4.

α. Λ
β. Σ
γ. Λ
δ. Σ
ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Το πεδίο ορισμού της f είναι το R διότι $x^2+1\neq 0$.

Η f είναι παραγωγίσιμη , με $f'(x)=\frac{2x(x^2+1)-x^2 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

Ισχύουν : $f'(x)=0\ \ για\ x=0.$

$f'(x)>0\ \ για\ x>0.$

$f'(x)<0\ \ για\ x<0.$

Άρα	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$\boldsymbol{f(x)}$	**γν. φθίνουσα**	**ολ.ελ.**	**γν. αύξουσα**

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο x=0 με τιμή f(0)=0.

Β2. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R.

$$f''(x)=\frac{2(x^2+1)^2-2x2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}=\frac{2(x^4+2x^2+1)-8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}=\frac{-6x^4-4x^2+2}{(x^2+1)^4}=-2\frac{3x^4+2x^2-1}{(x^2+1)^4}.$$

Το πρόσημο της f'' εξαρτάται από τον αριθμητή.

Θέτουμε $x^2 = \omega$. $3\omega^2 + 2\omega - 1 = 0$

$\Delta = 16$ άρα έχει ρίζες τους αριθμούς $\omega = \frac{1}{3}$ και $\omega = -1$.

Αν $-1 < \omega < \frac{1}{3}$ $3\omega^2 + 2\omega - 1 < 0$

Δηλαδή $-1 < x^2 < \frac{1}{3}$ ή $x^2 < \frac{1}{3}$ ή αν $x \in (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$ τότε $3x^4 + 2x^2 - 1 < 0$. Άρα $f''(x) > 0$.

Αν $\omega < -1$ ή $\omega > \frac{1}{3}$ $3\omega^2 + 2\omega - 1 > 0$

Δηλαδή αν $x^2 > \frac{1}{3}$ ή $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ή $(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$ τότε $3x^4 + 2x^2 - 1 > 0$. Άρα $f''(x) < 0$.

Άρα η f είναι κυρτή στο διάστημα $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$

κοίλη στα διαστήματα $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$ $και$ $[\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$

Η f είναι συνεχής και δέχεται εφαπτομένη στα $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ kai $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Αλλάζει κυρτότητα πριν και μετά από τα σημεία αυτά , άρα η f έχει σημεία καμπής τα

$\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$ $και$ $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$.

Β3. Η f είναι συνεχής στο R άρα δεν παρουσιάζει κατακόρυφες ασύμτωτες.

Ελέγχουμε για οριζόντιες.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$ Άρα η f έχει στο +∞ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία y=1.

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$ Άρα η f έχει στο -∞ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία y=1.

Προφανώς δεν θα έχει πλάγιες ασύμτωτες.

Β4.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$ (1), $x\in\mathbb{R}$, έχει προφανή λύση $x=0$, αφού $e^0-0-1=0$ ισχύει.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^{x^2}-x^2-1=0,\ x\in\mathbb{R}$.

Οπότε η (1) $\Leftrightarrow g(x)=0$ και $g(0)=1$.

Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα των παραγωγίσιμων

e^{x^2} (σύνθεση των παραγωγίσιμων x^2, e^x), $-x^2$, -1, άρα και συνεχής.

Είναι $g'(x)=(e^{x^2}-x^2-1)'=e^{x^2}(x^2)'-2x=e^{x^2}\cdot 2x-2x=2x(e^{x^2}-1),\ x\in\mathbb{R}$.

Έχουμε $g'(x)=0\Leftrightarrow 2x(e^{x^2}-1)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $e^{x^2}=1\Leftrightarrow x=0$.

Έστω $e^{x^2}-1\geq 0\Leftrightarrow e^{x^2}\geq e^0\Leftrightarrow x^2\geq 0$, ισχύει.

Πίνακας προσήμου της $g'(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$2x$	$-$	0	$+$
$e^{x^2}-1$	$+$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$

Πίνακας προσήμου της $g'(x)$ και μονοτονίας της $g(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0 **Ο.Ε.**	$\nearrow$

Είναι $g'(x)<0$ στο $(-\infty,0)$, $g'(x)>0$ στο $(0,+\infty)$ και $g'(0)=0$ άρα η g παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο μόνο στο $x=0$, το $g(0)=0$.

Άρα το $x=0$ είναι μοναδική ρίζα της $g(x)=0$, άρα και μοναδική λύση της εξίσωσης (1).

Γ2. Έχουμε $f^2(x)=(e^{x^2}-x^2-1)^2, x\in\mathbb{R}$.

Έστω $f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0 \Leftrightarrow (e^{x^2}-x^2-1)^2=0 \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1 \overset{\Gamma 1}{\Leftrightarrow} x=0$.

Η συνάρτηση f στο διάστημα $(-\infty,0)\subseteq\mathbb{R}$ είναι συνεχής και δε μηδενίζεται σ' αυτό.

Άρα η f διατηρεί πρόσημο στο $(-\infty,0)$.

Οπότε

- Αν $f(x)<0$ στο $(-\infty,0)$, τότε στο διάστημα αυτό είναι

  $f^2(x)=(e^{x^2}-x^2-1)^2 \Leftrightarrow |f(x)|=|e^{x^2}-x^2-1| \Leftrightarrow -f(x)=|e^{x^2}-x^2-1|$ (2)

  Από Γ1 έχουμε ότι για $x<0$, g γνησίως φθίνουσα, άρα $g(x)>0 \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1>0$.

  Οπότε $(2) \Leftrightarrow -f(x)=e^{x^2}-x^2-1 \Leftrightarrow f(x)=-e^{x^2}+x^2+1$.

- Αν $f(x)>0$ στο $(-\infty,0)$, τότε στο διάστημα αυτό είναι

  $f^2(x)=(e^{x^2}-x^2-1)^2 \Leftrightarrow |f(x)|=|e^{x^2}-x^2-1| \Leftrightarrow f(x)=|e^{x^2}-x^2-1|$ (3)

  Έχουμε για $x<0$, $e^{x^2}-x^2-1>0$.

  Άρα $(3) \Leftrightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2-1$.

Επειδή επιπλέον, $f(0)=0$ έχουμε

- ή $f(x)=-e^{x^2}+x^2+1$, για κάθε $x\in(-\infty,0]$
- ή $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, για κάθε $x\in(-\infty,0]$

Αντίστοιχα έχουμε

- ή $f(x)=-e^{x^2}+x^2+1$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$
- ή $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$

Τελικά συνδυάζοντας τα παραπάνω η f έχει έναν από τους παρακάτω τύπους:

- $f(x)=-e^{x^2}+x^2+1, x\in\mathbb{R}$
- $f(x)=e^{x^2}-x^2-1, x\in\mathbb{R}$
- $f(x)=\begin{cases}-e^{x^2}+x^2+1, & x\le 0\\ e^{x^2}-x^2-1, & x>0\end{cases}$
- $f(x)=\begin{cases}e^{x^2}-x^2-1, & x\le 0\\ -e^{x^2}+x^2+1, & x>0\end{cases}$

Γ3. $f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$

Η f είναι παραγωγίσιμή στο $\mathbb{R}$ (αιτιολόγηση στο Γ1, αφού $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$)

άρα και συνεχής, με $f'(x)=2x(e^{x^2}-1)$.

Η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως γινόμενο και άθροισμα παραγωγίσιμων, με

$f''(x)=[2x(e^{x^2}-1)]'=2(e^{x^2}-1)+2xe^{x^2}2x=2(e^{x^2}-1)+4x^2e^{x^2}$

Είναι $e^{x^2}-1\geq 0\Leftrightarrow e^{x^2}\geq 1\Leftrightarrow x^2\geq 0$, που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $e^{x^2}-1=0$ μόνο για $x=0$.

Επίσης $4x^2e^{x^2}\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $4x^2e^{x^2}=0$ μόνο για $x=0$.

Άρα $f''(x)>0$, για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα και στο 0, οπότε η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ4. Δίνεται η εξίσωση $f(|ημx|+3)-f(|ημx|)=f(x+3)-f(x),\ (1)$ με $x\in[0,+\infty)$.

Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=f(x+3)-f(x)$, με $x\geq 0$.

Οπότε $(1)\Leftrightarrow h(|ημx|)=h(x),(2)$.

Είναι h παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ ως άθροισμα και σύνθεση παραγωγίσιμων, άρα και συνεχής.

Έχουμε $h'(x)=f'(x+3)-f'(x)$.

Για $x>0$ είναι $x+3>x$ και αφού η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ (Γ3) η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[0,+\infty)$.

Οπότε $x+3>x\Rightarrow f'(x+3)>f'(x)\Rightarrow h'(x)>0$ για κάθε $x\geq 0$.

Επομένως η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, άρα και 1-1.

Τότε $(2)\Leftrightarrow |ημx|=x\Leftrightarrow x=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\int_0^{\pi}((f(x)+f''(x))\cdot\eta\mu x)\,\mathrm{dx}=\pi \Rightarrow$$

$$\int_0^{\pi}(f(x)\cdot\eta\mu x)dx+\int_0^{\pi}(f''(x)\cdot\eta\mu x)dx=\pi$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi}(f(x)\cdot\eta\mu x)dx+\left[f'(x)\cdot\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu\,\mathrm{x})dx=\pi$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi}(f(x)\cdot\eta\mu x)dx+0-0-\left(\left[f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}(f(x)\cdot(-\eta\mu x))dx\right)=\pi$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi}(f(x)\cdot\eta\mu x)dx-\left(-f(\pi)-f(0)\right)-\int_0^{\pi}(f(x)\cdot\eta\mu x)dx=\pi$$

$\Rightarrow f(\pi)+f(0)=\pi$ **(1)**

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=1$$

Θεωρώ $g(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}$ με $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=1$

Άρα

$f(\mathrm{x})=g(x)\cdot\eta\mu x\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1\cdot 0=0\Rightarrow f(0)=0$ **(2)** Αφού f συνεχής στο 0.

Από (1),(2) έχω $f(\pi)=\pi$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)\cdot\eta\mu x-0}{x}=\lim_{x\to 0}g(x)\cdot\frac{\eta\mu x}{x}=1$$

Άρα $f'(0)=1$.

Δ2.

Έστω ότι η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και αφού είναι παραγωγισίμη άρα από θεώρημα Fermat $f'(x_0)=0$

$e^{f(x)}+x=f(f(x))+e^{x}$ παραγωγίζοντας κατά μέλη αφού η σχέση είναι παραγωγίσιμη έχω

$$e^{f(x)}\cdot f'(x)+1=f'(\mathrm{f}(x))\cdot f'(x)+e^{x} \overset{x=x_0}{\Rightarrow}$$

$$e^{f(x_0)}\cdot f'(x_0)+1=f'(\mathrm{f}(x_0))\cdot f'(x_0)+e^{x_0} \Rightarrow e^{x_0}=1 \Rightarrow x_0=0$$

Άρα η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$ το οποίο είναι άτοπο αφού $f'(0)=1$.

Αφού η f δεν παρουσιάζει ακρότατα άρα $f'(\mathrm{x})\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$

Επίσης f' συνεχής στο $\mathbb{R}$ άρα η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$, οπότε $f'(\mathrm{x})>0, \forall \mathrm{x}\in\mathbb{R}$ ή $f'(\mathrm{x})<0, \forall \mathrm{x}\in\mathbb{R}$

Όμως $f'(0)=1>0$ άρα $f'(\mathrm{x})>0, \forall \mathrm{x}\in\mathbb{R}$ οπότε η f αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ4.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\left|\frac{\eta\mu x}{f(x)}\right|=\left|\frac{1}{f(x)}\right|\cdot|\eta\mu x|\leq\left|\frac{1}{f(x)}\right| \Rightarrow -\left|\frac{1}{f(x)}\right|\leq\frac{\eta\mu x}{f(x)}\leq\left|\frac{1}{f(x)}\right|$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|\right)=0\end{array}\right\} \text{Από Κριτήριο παρεμβολής έχουμε } \lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{f(x)}=0$$

$$\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|=\left|\frac{1}{f(x)}\right|\cdot|\sigma\upsilon\nu x|\leq\left|\frac{1}{f(x)}\right| \Rightarrow -\left|\frac{1}{f(x)}\right|\leq\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\leq\left|\frac{1}{f(x)}\right|$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|\right)=0\end{array}\right\} \text{Από Κριτήριο παρεμβολής έχουμε } \lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\eta\mu x}{f(x)}+\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right)=0$

Δ4.

$$0<\int_1^{e^\pi}\left(\frac{f(\ln x)}{x}\right)dx<\pi^2$$

Θέτω

$$\begin{aligned}&\ln x=u\\&\frac{1}{x}dx=du\end{aligned}\quad \text{καθώς}\quad \begin{aligned}&x=1 \quad u=0\\&x=e^\pi \quad u=\pi\end{aligned}$$

$$\int_1^{e^\pi}\left(\frac{f(\ln x)}{x}\right)dx=\int_0^\pi f(u)du$$

$$0\le u\le\pi \overset{f\nearrow}{\Rightarrow} f(0)\le f(u)\le f(\pi)\Rightarrow 0\le f(u)\le\pi\Rightarrow f(u)\ge 0$$

Και η f δεν είναι παντού ίση με 0 $\left(f(\pi)=\pi\right)$

$$\int_0^\pi f(u)du>0$$

$$f(u)\le\pi\Rightarrow f(\mathrm{u})-\pi\le 0$$

Η f δεν είναι παντού 0 (αφού $f(0)-\pi=-\pi\neq 0$)

$$\int_0^\pi (f(u)-\pi)du<0\Rightarrow\int_0^\pi f(u)du<\int_0^\pi \pi du$$

$$\int_0^\pi f(u)du<[\pi x]_0^\pi\Rightarrow\int_0^\pi f(u)du<\pi^2$$

Επιμέλεια απαντήσεων: Κατούδης Γιώργος, Κουντούπης Ηλίας, Παναγούλα Νατάσα, Τσαλιγόπουλος Μίλτος, Βαλιάδη Μαρία